

3. Meranie indukčnosti

Vlastná indukčnosť – pasívna elektrická veličina charakterizujúca vlastnú indukciu, symbol L , jednotka v SI **Henry**, symbol jednotky **H**, základná vlastnosť cievok. V cievke, v ktorej sa mení prúd, sa indukuje napätie, ktoré závisí okrem zmeny prúdu o ΔI za čas Δt aj od koeficientu L , ktorý nazývame vlastná indukčnosť.

Vlastná indukčnosť spôsobuje to, že v striedavom obvode má cievka väčší odpor (impedanciu) ako v jednosmernom obvode (pri rovnakom napätí tečie cievkou menší prúd). Prúd tečúci obvodom s cievkou závisí tiež od frekvencie, čím väčšia je frekvencia, tým menší je prúd. Základné vzťahy pre výpočet vlastnej indukčnosti:

$$L = m \frac{S}{l} N^2 \quad (\mathbf{H}, \mathbf{Hm}^{-1}, \mathbf{m}^2, \mathbf{m})$$

indukčný zákon

$$u_i = L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (\mathbf{V}, \mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{s})$$

Indukčná reaktancia (induktancia)

$$X_L = \omega L \quad (\mathbf{\Omega}; \mathbf{rad.s}^{-1}, \mathbf{H})$$

kde

L – vlastná indukčnosť

Λ_m – magnetická vodivosť

μ – permeabilita

l – dĺžka siločiar

S – prierez cievky (magnetického obvodu)

N – počet závitov

ω – uhlová frekvencia

Vzájomná indukčnosť – elektrická veličina charakterizujúca vzájomnú indukciu, symbol M , jednotka v SI **Henry**, symbol jednotky **H**. Ak sa cievka nachádza v premenlivom magnetickom poli, indukuje sa v nej napätie, ktoré nazývame transformačné indukované napätie. Ak sa v primárnej cievke mení prúd, indukuje sa v sekundárnej cievke napätie, ktoré závisí okrem zmeny prúdu v primárnej cievke o ΔI za čas Δt aj od koeficientu M , ktorý nazývame vzájomná indukčnosť.

Základné vzťahy pre výpočet vlastnej indukčnosti:

$$u_i = M \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (\mathbf{V}; \mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{s})$$

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (\mathbf{H}, -, \mathbf{H}, \mathbf{H})$$

kde

u_i – indukované napätie

M – vzájomná indukčnosť

ΔI – zmena prúdu v primárnej cievke

k – faktor väzby (bezrozmerné číslo)

L_1, L_2 – vlastné indukčnosti primárnej a sekundárnej cievky

Cievka – elektrická súčiastka, prechodom prúdu vytvára magnetické pole.

Druhy cievok:

a) ideálna cievka – činný odpor má nulový ($R_L = 0$), napätie predbieha prúd o 90° , impedancia sa rovná reaktancii $Z = X_L$

b) technická cievka – činný odpor má rôzny od nuly ($R_L \neq 0$), fázový posun medzi napätím a prúdom je v intervale $\varphi < 0; 90^\circ >$. Cievka má odpor, pretože je navinutá z vodiča z vodiča s určitého materiálu s konečnou konduktivitou, s určitým prierezom a dĺžkou. **Pri meraní je dôležité, aby cievkou netiekol väčší ako menovitý (dovolený) prúd, aby nedošlo k poškodeniu cievky stratami vo vinutí.**

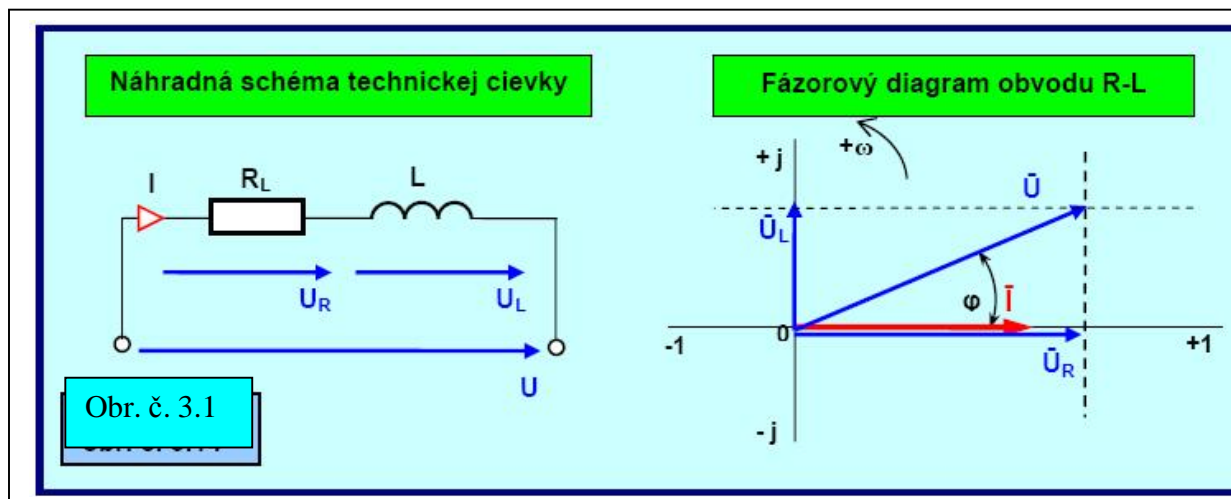
Keďže v technickej praxi sa ideálne cievky nevyskytujú, musíme aj pri meraniach uvažovať s technickými cievkami. Technickú cievku zvyčajne nahrádzame sériovým zapojením ideálneho rezistora R_L a ideálnej cievky s vlastnou indukčnosťou L . Impedancia cievky v komplexnom

tvare je $Z = R_L + j.X_L$. Absolútna hodnota tejto impedancie je $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$

Podľa jadra:

a) cievky bez jadra – vzduchové

b) cievky s feromagnetickým jadrom



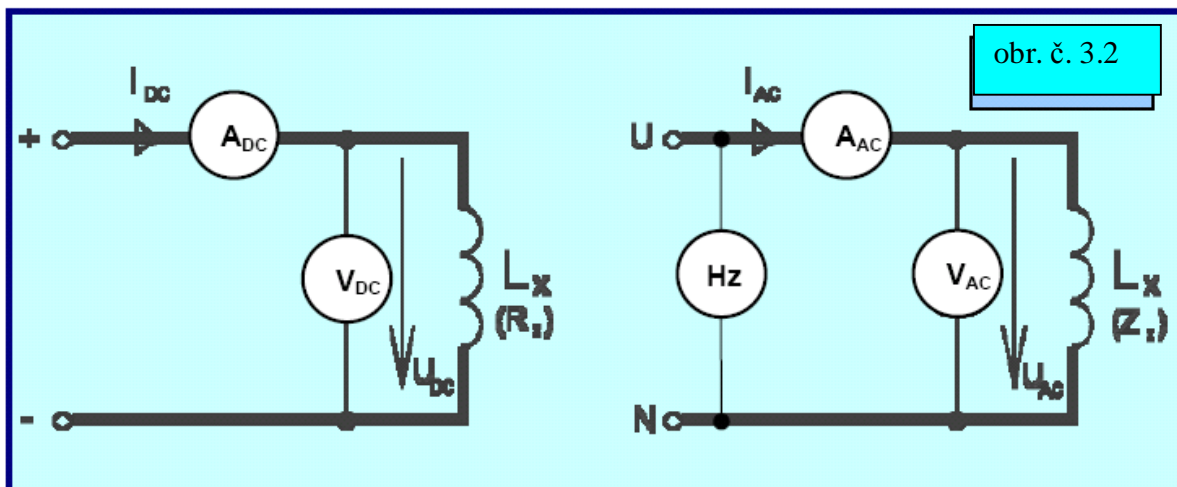
Metódy merania indukčnosti:

1. Meranie indukčnosti voltampérovou metódou
2. Meranie indukčnosti troma voltmetrami
3. Meranie indukčnosti troma ampérmetrami
4. Meranie indukčnosti cievky s feromagnetickým jadrom
5. Meranie vzájomnej indukčnosti

3.1 Meranie indukčnosti voltampérovou metódou

Princíp merania indukčnosti je založený na odmeraní činného odporu cievky a jej impedancie voltampérovou metódou a následnom výpočte indukčnosti. Metóda je vhodná na meranie indukčnosti vzduchových cievok (bez feromagnetického jadra).

Cievku pripojíme najprv na jednosmerný zdroj. Odmeriame DC napätie a prúd a pomocou ohmovho zákona vypočítame činný odpor cievky. Potom cievku pripojíme na striedavý zdroj, odmeriame AC napätie a prúd a vypočítame impedanciu cievky. Indukčnosť vypočítame podľa odvodeného vzťahu.

Schéma zapojenia

Odvodenie vzťahu pre výpočet indukčnosti:

činný odpor cievky vypočítame
$$R_X = \frac{U_{DC}}{I_{DC}}$$

impedancia cievky
$$Z_X = \frac{U_{AC}}{I_{AC}}$$

Zo vzťahu $X_L = \omega L_X$ \Rightarrow
$$L_X = \frac{X_L}{\omega}$$

$$L_X = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{Z_X^2 - R_X^2}$$

Pričom sme za X_L zo vzťahu $Z_X = \sqrt{R_X^2 + X_L^2}$ dosadili $X_L = \sqrt{Z_X^2 - R_X^2}$

Poznámky k praktickému meraniu

- schémy zapojenia na **obr. č. 3.2** sú vhodné na meranie indukčnosti cievky s malým odporom a impedanciou, v opačnom prípade je potrebné voltmeter zapojiť pred ampérmeter
- kvôli zvýšeniu presnosti môžeme odmerať pri niekoľkých hodnotách DC napätia DC prúdy a pri niekoľkých hodnotách AC napätia odmeriame AC prúdy. Pri jednotlivých meraniach vypočítame odpory a impedancie a **za výslednú hodnotu odporu a impedancie cievky považujeme aritmetickú strednú hodnotu týchto veličín**. Stredné hodnoty vypočítame takto:

$$R_S = \frac{\sum_{i=1}^n R_{Xi}}{n} \quad Z_S = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{Xi}}{n}$$

- ak použijeme digitálne multimetre, nie je potrebné meniť zapojenie a vymieňať prístroje. Stačí zmeniť napájanie (DC → AC) a na prístrojoch nastaviť vhodné rozsahy
- dôležitou úlohou pri praktickom meraní je určiť maximálne hodnoty napätí a prúdov a tomu zodpovedajúce meracie rozsahy prístrojov, aby nedošlo k preťaženiu cievky a prístrojov
- vhodné je použiť normály indukčnosti, ktoré majú presne dané parametre a tiež je možné porovnať namerané a skutočné hodnoty a určiť presnosť (chybu) merania
- tabuľka nameraných a vypočítaných hodnôt by mohla vyzeráť napríklad takto:

tab. č. 3.1

TAB. Č. 3.1

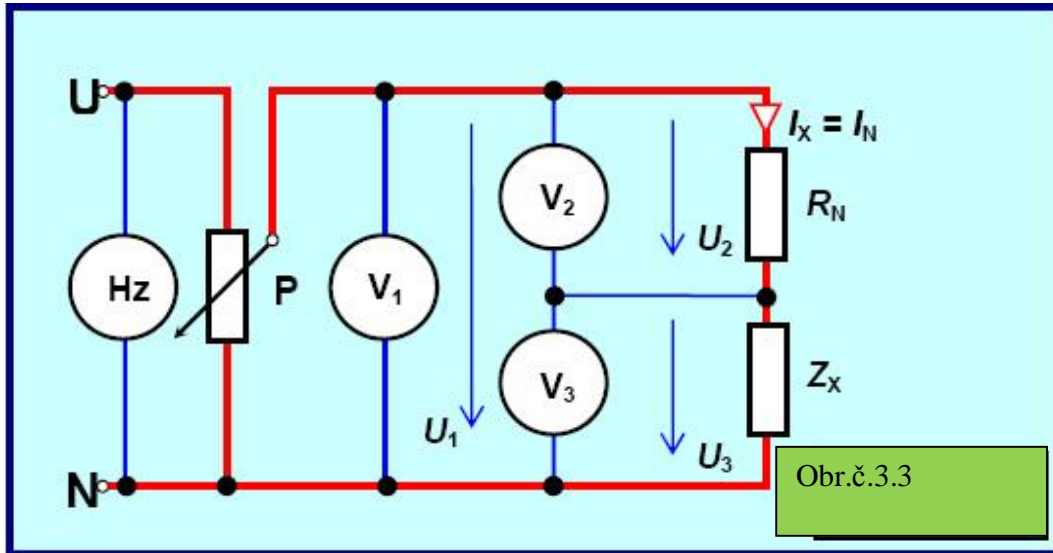
	$U_{DC}(V)$	$I_{DC}(mA)$	$R_X(\Omega)$	$R_S(\Omega)$	$U_{AC}(V)$	$I_{AC}(mA)$	$Z_X(\Omega)$	$Z_S(\Omega)$	$L_X(H)$
1									
2									
3									
4									
5									

3.2 Meranie indukčnosti tromi voltmetrami

Všeobecný princíp merania pomocou troch voltmetrov

Nepriame metódy merania indukčnosti a kapacity pomocou troch voltmetrov alebo pomocou troch ampérmetrov sú veľmi univerzálne a dostatočne presné. Umožňujú zisťovať aj tie veličiny a parametre technických prvkov, ktoré sa inými metódami zistiť nedajú. Pri oboch metódach sa používa striedavý zdroj.

Schéma zapojenia pre meranie troma voltmetrami

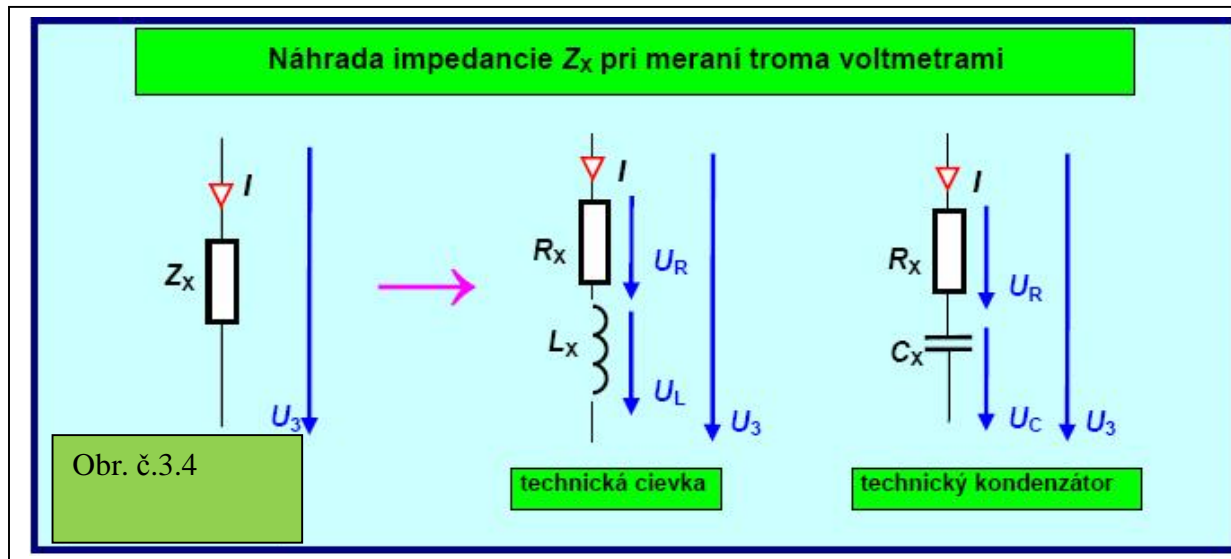


Pri tejto metóde sa k neznámemu prvku zapája do série známy rezistor (normál odporu, odporová dekáda). Voltmetrom V_1 odmeriame celkové napätie na oboch prvkoch U_1 , voltmetrom V_2 odmeriame napätie na známom odpore U_2 a voltmetrom V_3 odmeriame napätie na neznámom prvku U_3 .

Impedancia Z_X predstavuje impedanciu cievky s neznámou indukčnosťou alebo kondenzátora s neznámou kapacitou. Ak sú vnútorné odpory voltmetrov dostatočne veľké, aby sme mohli zanedbať prúdy tečúce voltmetrami, platí:

$$I = I_X = I_N \Rightarrow \frac{U_3}{Z_X} = \frac{U_2}{R_N} \Rightarrow Z_X = R_N \cdot \frac{U_3}{U_2}$$

Pri meraní indukčnosti alebo kapacity troma voltmetrami je potrebné technický prvok nahradiť **sériovým zapojením** ideálneho rezistora a ideálnej cievky alebo ideálneho kondenzátora podľa **obr. č. 3.4**.



Pri sériovej náhrade je impedancia neznámeho prvku rovná:

$$Z_x = R_x \pm jX = Z_x \cdot \cos \varphi_x \pm j Z_x \cdot \sin \varphi_x \quad X = Z_x \cdot \sin \varphi_x$$

kde

Z_x – impedancia neznámeho prvku (cievky alebo kondenzátora)

R_x – činný odpor neznámeho prvku

X – indukčná (X_L) alebo kapacitná (X_C) reaktancia neznámeho prvku

φ_x – fázový posun medzi napätím a prúdom na neznámom prvku (medzi I a U_3)

Pri odvodzovaní vzťahov pre výpočet indukčnosti alebo kapacity pri meraní pomocou troch voltmetrov alebo pomocou troch ampérmetrov budeme potrebovať ešte vedieť poznatky z matematiky:

- Pytagorova veta v goniometrickom tvare $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ $\sin j = \sqrt{1 - \cos^2 j}$
- kosínusova veta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
- platí: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

Meranie indukčnosti troma voltmetrami

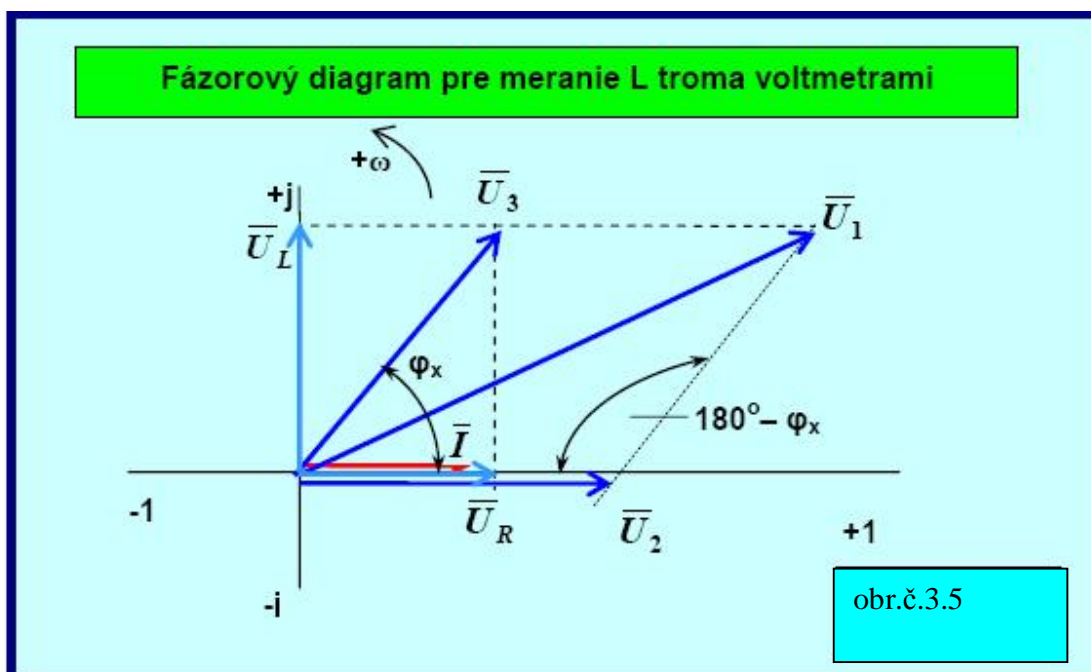
Použijeme zapojenie na **obr. č. 3.16**, v ktorej impedanciu Z_x tvorí sériové zapojenie ideálneho rezistora s odporom R_x a ideálnej cievky s neznámou indukčnosťou L_x .

Odvođenje vzťahu pre výpočet indukčnosti:

$$X_L = \omega \cdot L_X \Rightarrow L_X = \frac{X_L}{\omega} = \frac{Z_X \cdot \sin \varphi_X}{2\pi \cdot f} = \frac{R_N \cdot \frac{U_3}{U_2}}{2\pi \cdot f} \cdot \sin \varphi_X = \frac{R_N \cdot U_3}{2\pi \cdot f \cdot U_2} \cdot \sin \varphi_X \Rightarrow$$

$$L_X = \frac{R_N \cdot U_3}{2\pi \cdot f \cdot U_2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_X}$$

Napätia odmeriame voltmetrami, frekvenciu buď poznáme (50 Hz) alebo použijeme frekvenciomer. Jedinou neznámou veličinou v odvodenom vzťahu je účinník $\cos \varphi_X$. Zistíme ho pomocou kosínusovej vety z fázorového diagramu.



Odvodenie vzťahu pre výpočet účinníka

$$U_1^2 = U_2^2 + U_3^2 - 2 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot \cos(180^\circ - \varphi_X) \Rightarrow U_1^2 = U_2^2 + U_3^2 + 2 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot \cos \varphi_X$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_X = \frac{U_1^2 - U_2^2 - U_3^2}{2 \cdot U_2 \cdot U_3}$$

Poznámky k praktickému meraniu

- na odporovej dekáde nastavíme odpor porovnateľný s impedanciou cievky $X_N Z R = \&$
- odporová dekáda s odporom R_N má menovitý prúd I_{Rmax} a cievka s neznámou indukčnosťou L_X má menovitý prúd I_{Lmax} a obidva prvky sú zapojené do série, **maximálny prúd I_{max}** , ktorý môže pri meraní tiecť obvodom, **sa rovná menšiemu z týchto prúdov**
- meracie rozsahy voltmetrov určíme takto

$$M_{V2} = R_N \cdot I_{\max}$$

$$M_{V3} = Z_X \cdot I_{\max}$$

$$M_{V1} = Z_{\text{výst}} \cdot I_{\max},$$

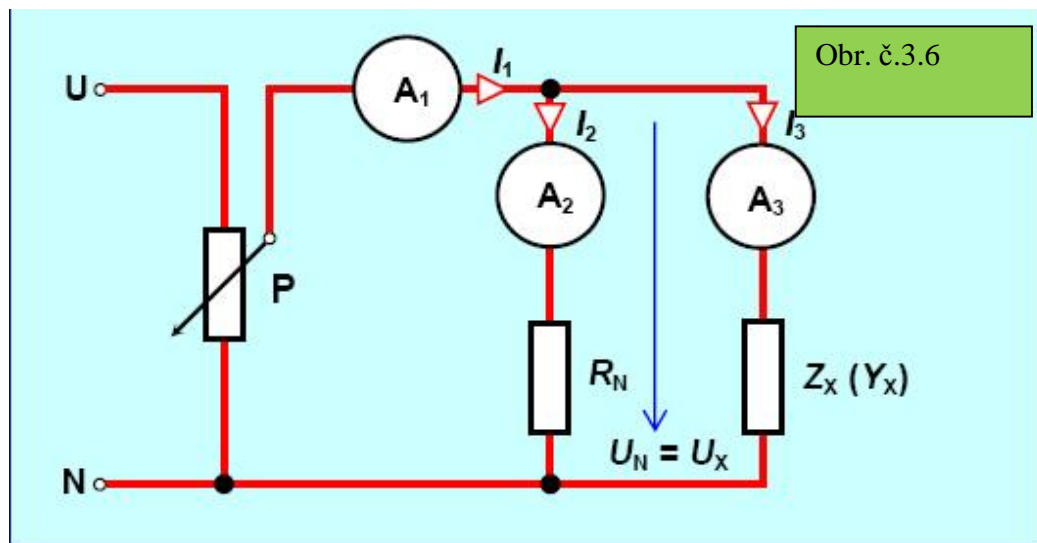
kde $Z_{\text{výst}}$ je výsledná impedancia obvodu a vypočíta sa takto $Z_{\text{výst}} = \sqrt{(R_N + R_X)^2 + X_L^2}$

3.3 Meranie indukčnosti troma ampérmetrami

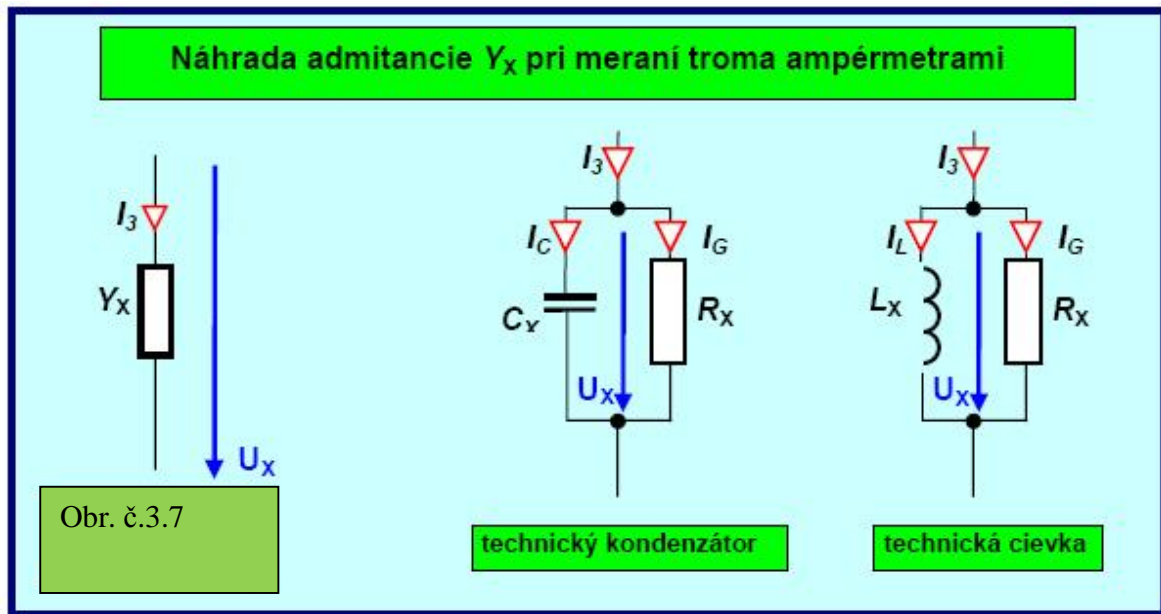
Všeobecný princíp merania pomocou troch ampérmetrov

Pri tejto metóde sa k neznámemu prvku zapája paralelne známy rezistor (normál odporu, odporová dekáda). Ampérmetrom **A1** odmeriame celkový prúd I_1 , ampérmetrom **A2** odmeriame prúd tečúci známym odporom I_2 a ampérmetrom **A3** odmeriame prúd tečúci neznámym prvkom I_3 .

Schéma zapojenia



Pri meraní indukčnosti alebo kapacity troma ampérmetrami je potrebné technický prvok nahradiť **paralelným zapojením** ideálneho rezistora a ideálnej cievky alebo ideálneho kondenzátora podľa obr. č. 3.6.



Pri paralelnej náhrade je admitancia neznámeho prvku rovná:

$$Y_x = G_x \pm jB = Y_x \cdot (\cos \varphi_x \pm \sin \varphi_x) \quad B = Y_x \cdot \sin \varphi_x$$

kde

Y_x – admitancia neznámeho prvku (cievky alebo kondenzátora)

G_x – koduktancia neznámeho prvku

B – indukčná (B_L) alebo kapacitná (B_C) susceptancia neznámeho prvku

φ_x – fázový posun medzi napätím a prúdom na neznámom prvku (medzi I_3 a U)

Admitancia Y_x predstavuje admitanciu cievky s neznámou indukčnosťou alebo kondenzátora s neznámou kapacitou. Ak sú vnútorné odpory ampérmetrov zanedbateľné, môžeme zanedbať úbytky napätí na ampérmetroch a platí:

$$U = U_x = U_N \quad \Rightarrow \quad Z_x \cdot I_3 = R_N \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad Z_x = R_N \cdot \frac{I_2}{I_3} \quad \Rightarrow$$

$$Y_x = \frac{I_3}{R_N \cdot I_2}$$

Meranie indukčnosti troma ampérmetrami

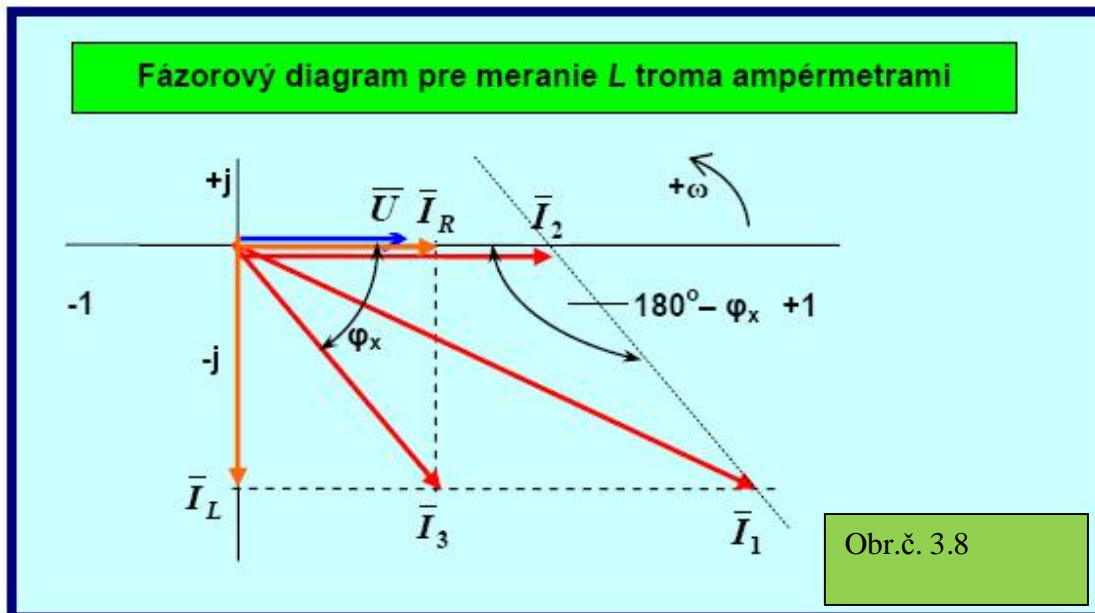
Použijeme zapojenie na obr. č. 3.6, v ktorej admitanciu Y_x tvorí paralelné zapojenie ideálneho rezistora s odporom R_x a ideálnej cievky s neznámou indukčnosťou L_x .

Odvodenie vzťahu pre výpočet indukčnosti:

$$B_L = \frac{1}{\omega \cdot L_X} \quad \Rightarrow$$

$$L_X = \frac{1}{\omega \cdot B_L} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot Y_X \cdot \sin \varphi_X} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{I_3}{R_N \cdot I_2} \cdot \sin \varphi_X} = \frac{R_N \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot I_3 \cdot \sin \varphi_X}$$

$$L_X = \frac{R_N \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot I_3 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_X}}$$



Účinník $\cos \varphi$ zistíme pomocou pomocou kosínusovej vety z fázorového diagramu na obr. č. 3.8.

$$I_1^2 = I_2^2 + I_3^2 - 2 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot \cos(180^\circ - \varphi_X) \quad \Rightarrow \quad I_1^2 = I_2^2 + I_3^2 + 2 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_X$$

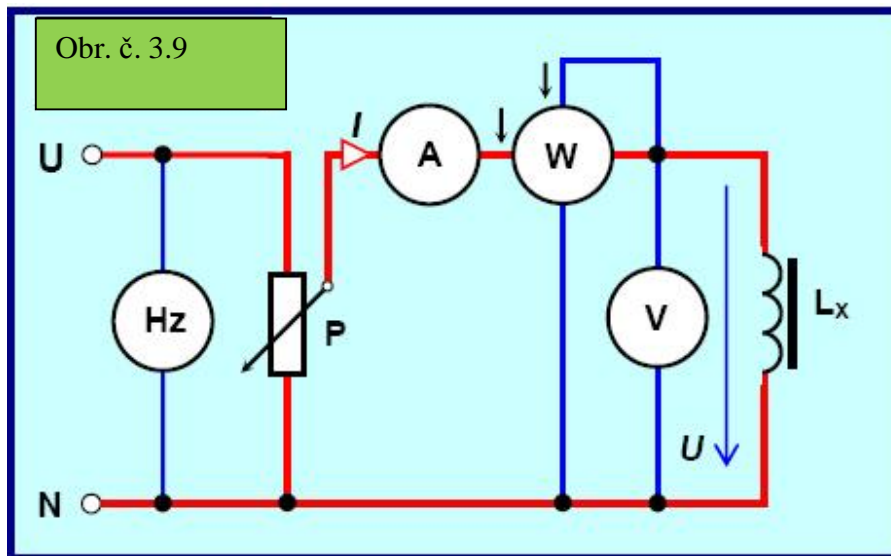
$$\Rightarrow \quad \cos \varphi_X = \frac{I_1^2 - I_2^2 - I_3^2}{2 \cdot I_2 \cdot I_3}$$

3. 4 Meranie indukčnosti cievky s feromagnetickým jadrom

Na meranie indukčnosti cievky s feromagnetickým jadrom sa používa tzv. wattmetrická metóda. Meracie prístroje sa zapoja rovnako, ako pri meraní jednofázového činného výkonu (pozri kapitolu „Meranie výkonov“). Voltmetrom odmeriame napätie na cievke U , ampérmetrom prúd I a wattmetrom straty na cievke (príkone cievky) ΔPL , ktoré vznikajú nielen vo vinutí, ale aj

v železe.

Schéma zapojenia



Odvozenie vzťahu pre výpočet indukčnosti:

Podobne ako pri V-A metóde zo vzťahu $X_L = \omega L_X$ $L_X = \frac{X_L}{\omega}$

Reaktancia cievky $X_L = \sqrt{Z_X^2 - R_X^2}$

Impedanciu cievky určíme pomocou ohmovho zákona $Z_X = \frac{U}{I}$

Na rozdiel od V-A metódy určíme činný odpor cievky pomocou nameraných strát

$$\Delta P_L = R_X \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad R_X = \frac{\Delta P_L}{I^2}$$

Indukčnosť cievky

$$L_X = \frac{1}{2\pi \cdot f} \cdot \sqrt{Z_X^2 - R_X^2} \quad \Rightarrow \quad L_X = \frac{1}{2\pi \cdot f} \cdot \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{\Delta P_L}{I^2}\right)^2}$$

Na meranie strát zvyčajne používame wattmeter s elektrodynamickým meracím systémom (pozri kapitolu 2). Wattmeter v zapojení podľa obr. č. 3.9 meria okrem strát na cievke ΔP_L aj spotrebu meracích prístrojov, ktorú označujeme ΔP_{KOR} .

Platí teda $P_W = \Delta P_L + \Delta P_{KOR}$, kde P_W je výkon nameraný wattmetrom. Aby sme zistili straty na cievke čo najpresnejšie, je potrebné spotrebu meracích prístrojov odčítať od P_W .

Straty na cievke sa potom rovnajú

$$\Delta P_L = P_W - \Delta P_{KOR}$$

Spotrebu meracích prístrojov vypočítame pomocou vzťahu

$$\Delta P_{KOR} = U^2 \cdot \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_W} \right)$$

Pri meraní môžeme určiť aj účinník cievky pomocou vzťahu

$$\cos \varphi = \frac{\Delta P_L}{U \cdot I}$$

Ľavý zväzok zväzku je vhodný pri odčítaní prúdu z ampérmetra odpojiť voltmeter a napäťovú cievku wattmetra.